TP 1
Bases de Gröbner : Premières manipulations.

SageMath est un logiciel de calcul mathématique gratuit s'appuyant sur le langage de programmation Python. Vous pouvez l'installer sur votre ordinateur ou vous pouvez l'utiliser directement en ligne via le lien http ://sagecell.sagemath.org/. Vous pouvez aussi créer un compte gratuit ici https ://cocalc.com/. En TP, vous utiliserez la version de SageMath installée sur les machines des salles 120-121-122.

Mise en route : Le livre gratuit Calcul mathématique avec Sage est un livre généraliste sur SageMath qui couvre tous les niveaux, de la licence au doctorat en passant par le master. La lecture du chapitre 1 est vivement conseillée. Le manuel de référence http ://doc.sagemath.org/html/en/reference/ est également utile.

1. Ouvrir un terminal.
2. Dans ce terminal, créer un répertoire ACGA :

   ```
   mkdir ACGA
   ```

   Entrer dans ce répertoire :

   ```
   cd ACGA
   ```

   puis lancer le notebook de sage sous jupyter :

   ```
   sage −n jupyter
   ```

   Une fenêtre firefox doit s'ouvrir.
3. Créer une nouvelle feuille de calcul SageMath (à partir de la feuille d'accueil homepage) pour répondre aux exercices du TP1.

Quelques remarques : *Pour valider un calcul, appuyer sur les touches majuscule et entrée.*
Pour aller à la ligne, appuyer sur la touche entrée.
Pour insérer une nouvelle cellule de calcul, cliquer sur le signe plus.
Pour insérer une nouvelle cellule de texte, cliquer sur le signe plus puis choisir Markdown à la place de Code dans la barre horizontale.
En cliquant sur jupyter en haut à gauche, vous obtenez la liste de vos fichiers présents dans le répertoire ACGA. Dans le menu en haut à droite vous pouvez créer de nouvelles feuilles SageMath et télécharger des fichiers.

Dans tout ce TP, on calculera les bases de Gröbner dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Exercice 1 : (Premiers calculs)

Calculer une base de Gröbner de l'idéal $I = \langle f, g\rangle$ pour les polynômes et ordres suivants :

1. $f = X^4Y - X^2Y$ et $g = X^2Y^2 - Y^2$, muni de l'ordre lexicographique avec $X > Y$.
   La famille $\{f, g\}$ est-elle une base de Gröbner de I ?
2. $f = XY - X$ et $g = -Y + X^2$, muni de l'ordre lexicographique avec $X < Y$.
   La famille $\{f, g\}$ est-elle une base de Gröbner de I ?
3. $f = X^2$ et $g = XY + Y^2$, muni de l'ordre lexicographique avec $X < Y$, puis $X > Y$.
   La famille $\{f, g\}$ est-elle une base de Gröbner de I pour chaque ordre des variables ?

4. $f = XY^3 + X^2Y - 1$ et $g = -Y^4 + XY^2 - X$, muni de l'ordre lexicographique gradué, puis de l'ordre lexicographique avec $X > Y$.
   La famille $\{f, g\}$ est-elle une base de Gröbner de I pour chaque ordre ?

On pourra utiliser les attributs order ='lex' et order ='deglex' dans la fonction PolynomialRing de Sage, ainsi que les fonctions Ideal et groebner_basis().

Exercice 2 : (Polynômes annulateurs)

À l'aide de bases de Gröbner, déterminer des polynômes annulateurs de $\sqrt[5]{6}+\sqrt[7]{8}$, $\sqrt[5]{6}-\sqrt[7]{8}$, $\sqrt[5]{6}\cdot\sqrt[7]{8}$ et $\dfrac{\sqrt[5]{6}}{\sqrt[7]{8}}$.

Exercice 3 : (Polynômes symétriques et Sommes de puissances)

Écrire le polynôme symétrique $X_1^5X_2^5X_3^5 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ (on cherchera la forme normale) :

1. en fonction des polynômes symétriques élémentaires
   $S_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $S_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3$ et $S_3 = X_1X_2X_3$,
2. en fonction des sommes de puissances $P_i = X_1^i + X_2^i + X_3^i$, pour $i \in \{1, \cdots, 5\}$.

Exercice 4 : (Un problème NP difficile : 3-coloriage d'un graphe)

On considère le problème du 3-coloriage suivant :

- tous les sommets du graphe ci-dessous sont coloriés à l'aide de 3 couleurs.
- deux sommets reliés par une arête ne possèdent pas la même couleur.

On associe la variable X_i au sommet i, et on prend les racines 3$^{\text{èmes}}$ de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}$ comme couleurs.

1. Montrer que l'idéal I associé au problème du 3-coloriage est engendré par la famille de polynômes $\{X_i^3 - 1 \mid 1 \leq i \leq 8\} \cup \{X_i^2 + X_iX_j + X_j^2 \mid 1 \leq i, j \leq 8, i \neq j,$ et i, j sont reliés par une arête$\}$.
2. Calculer une base de Gröbner de l'idéal I.
3. Déduire de cette base de Gröbner toutes les différentes manières de colorier le graphe.